

УДК 617.75-535

І.Г. Чиж, Т.О. Шиша

## ДОПУСТИМИ ПОХИБКИ АБЕРОМЕТРІЇ ОКА

This paper investigates the influence of the human eye's aberrations on a diffraction image of two points at the retina. These points are located at spatial resolution threshold according to the Raleigh's criterion. The diameter of a pupil zone was set to 3 mm, at which the eye has the highest sight acuity. We determine that in order to preserve normal spatial resolution of the eye the wavefront RMS of the eye should not exceed 0,1 of the wavelength. Based on this thesis, the criterion is proposed to evaluate permissible errors of eye aberrometry. Furthermore, we find new expressions to calculate permissible errors of aberration modes reconstruction for pupils exceeding 3 mm in a diameter.

### Вступ

На сьогодні існує більше п'ятнадцяти серійних моделей офтальмологічних аберометрів різних типів [1]. Дивно, але в технічних параметрах і характеристиках відсутня інформація від виробників щодо похибок, з якими визначаються цими вимірювальними приладами хвильова аберация ока та її окремі складники. Виняток становлять відомості лише про похибки вимірювання двох складових нижчих степеневих порядків — дефокуса (аметропії) та первинного астигматизму. Вочевидь, це пов'язано з можливістю порівнювати результати аберометрії з результатами рефрактометрії ока, яка здійснюється за допомогою існуючої сучасної високоточної рефрактометричної апаратури [1].

Факт відсутності даних про похибки вимірювань аберацийних складових вищих степеневих порядків відмічено в ряді публікацій [2, 3], де вказано на причини цього явища. Основними причинами вважається нерозвиненість технічних засобів (взірцевих мір абераций ока) через відсутність критерію, який би визначав допустимі похибки вимірювань цих абераций. Обґрунтування такого критерію дало б можливість створити вказані взірцеві міри та здійснювати за їх допомогою тестування аберометрів на похибки вимірювань хвильової аберации ока. Ця задача є актуальною і має важливе практичне значення.

### Постановка задачі

Підхід до визначення допустимих похибок аберометрії ока має орієнтуватися на наслідки, які можуть виникати при використанні неточних результатів вимірювань. Аберометрію здійснюють з метою корекції аберацийних вад оптичної системи ока. Якщо через помилкові дані про аберацийні вади їх корекція буде вико-

нана також неточно, то залишкові, не виправлені, аберации оптичної системи ока мають бути такими, що не погіршують гостроту зору, тобто не роблять її меншою за нормальну. Тому першочерговою задачею даного дослідження є пошук рівня таких абераций. За отриманими результатами далі необхідно встановити допустимі похибки аберометрії та отримати формули для розрахунків допустимих похибок вимірювання хвильової аберации ока в конкретній зоні зіниці ока.

Метою розв'язання поставленої задачі є розроблення теоретичного підґрунтя, потрібного для створення взірцевих мір абераций ока людини та для метрологічного забезпечення офтальмологічної аберометрії і підвищення її точності.

### Визначення допустимих похибок аберометрії оптичної системи ока

Ключове питання, на яке необхідно знайти аргументовану відповідь, стосується величини хвильової аберации оптичної системи ока, яку можна вважати допустимою. Відомо, що в офтальмології традиційно просторова роздільна здатність зорового апарату визначається через параметр  $\theta$ , який позначає гостроту зору. Він обчислюється за формулою

$$\theta = l' / \varepsilon,$$

де  $\varepsilon$  [кут. хвил.] — кутова межа просторового розділення зорового апарату. В офтальмологічних кабінетах величину  $\varepsilon$  визначають за допомогою тест-об'єктів типу кілець Ландольта, знаків Снеллена, літер алфавіту в таблицях Головіна—Сівцева, картини інтерференційних смуг зі змінною просторовою частотою та ін. По суті при цьому знаходять результат сумарної дії зорового апарату, який складається з

оптичної системи ока, сітківки і тієї частини мозку, яка взаємодіє із сітківкою.

Просторова роздільна здатність зорового апарату залежить від просторово-роздільної здатності оптичної системи ока та просторово-роздільної здатності сітківки як багатоеlementного фотоприймача, який є периферійною частиною мозку людини.

Для оцінювання впливу на гостроту зору тільки аберацій оптичної системи ока використовуються характеристики якості зображення, які є звичними в технічній оптиці — функція розсіювання точки (ФРТ) або оптична передавальна функція (ОПФ), що є фур'є-перетворенням ФРТ.

Обидві функції дають можливість визначати діапазон просторових частот, які пропускає оптична система ока. Чим ширшим є цей діапазон, тим більшу просторову роздільну здатність має оптика ока, що сприяє більшій гостроті зору.

У даній статті розглядаються допустимі величини аберацій, які априорно є невеликими і такими, що мало впливають на вигляд ОПФ та на діапазон просторових частот, які вона займає. В такому випадку для оцінки якості межі просторового розділення набагато доцільніше використовувати ФРТ і критерії, що пов'язані з цією функцією.

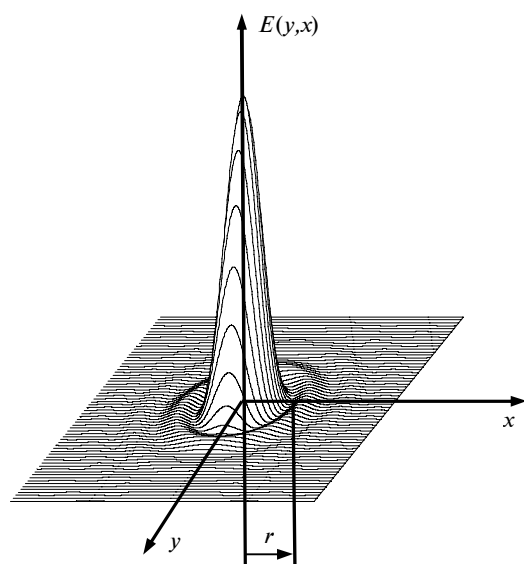


Рис. 1. Графік розподілу освітленості  $E(y, x)$  в зображенні точки, сформованому безабераційною оптичною системою з круглою зіницею:  $y, x$  — просторові координати в площині сітківки,  $r$  — радіус кола Ейрі

На вигляд ФРТ, яка відображає розподіл освітленості у сформованому на сітківці зображенні точки, впливають кілька факторів. Найбільш вагомими серед них є дифракція світлових хвиль на краях зіниці ока, аберації оптичної системи ока та оптична неоднорідність кристалика і скловидного тіла.

Внаслідок дифракції навіть абсолютно безабераційна оптична система ока формує зображення точки на сітківці у вигляді, відображеному графіком ФРТ —  $E(y, x)$  (рис. 1).

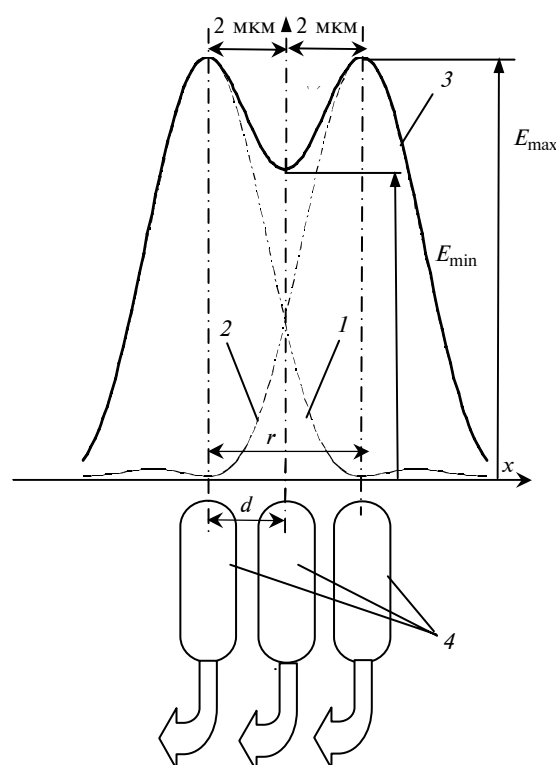
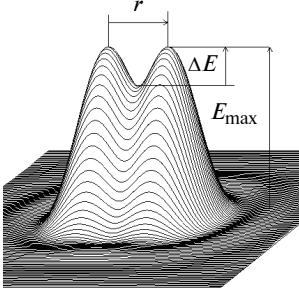
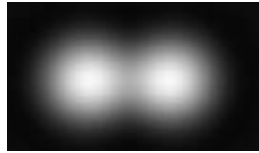
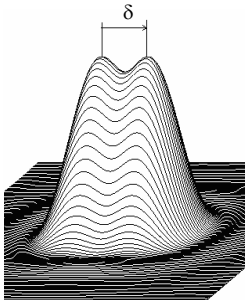
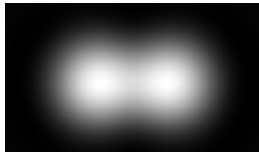
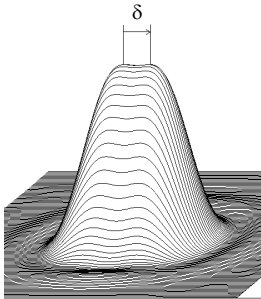
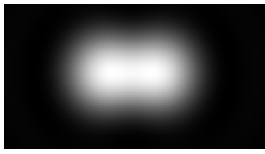


Рис. 2. Визначення обмежень, що вносить сітківка у просторово-роздільну здатність ока: 1, 2 — розподіл освітленості в дифракційному зображенні двох окремих точок; 3 — розподіл сумарної освітленості в дифракційному зображенні двох точок; 4 — ковочки в зоні фовеоли

При визначенні межі просторового розділення оптичної системи ока використовується тест-об'єкт у вигляді двох некогерентних точкових джерел світла. Око, що спостерігає такий тест-об'єкт, може сприймати дві точки як роздільні, коли відстань між центрами їх зображень на сітківці, згідно з правилом Релея, не менша за радіус кола Ейрі (див. рис. 1). При такій відстані розподіл сумарної освітленості на сітківці від обох точок утворює "провалля" ве-

Таблиця 1. Графіки розподілу в площині сітківки ока освітленості в зображенні двох точкових джерел світла

№	Параметри	Графік розподілу освітленості	Дифракційне зображення
1	Радіус кола Ейрі: $r = \frac{1,22\lambda f}{D}$ . При $\lambda = 0,55$ мкм, передній фокусній відстані ОС ока $f = 17$ мм, діаметрі зіниці ока $D = 3$ мм: $r = 3,8$ мкм		$\eta = \frac{\Delta E}{E_{\max}} = 0,265$
			
2	$\delta = 0,87r$		$\eta = \frac{\Delta E}{E_{\max}} = 0,05$
			
3	$\delta = 0,78r$		$\eta = \frac{\Delta E}{E_{\max}} = 0$
			

личиною  $\Delta E = E_{\max} - E_{\min}$  (рис. 2), яке при круглій зіниці та при її рівномірному освітленні має відносну величину  $\eta = \Delta E / E_{\max} \approx 0,27$  (табл. 1, рядок 1).

Зоровий апарат завдяки структурі сітківки, яка є багатоеlementним фотоприймачем, і завдяки контрастній чутливості сітківки (здатності відчувати різницю  $\Delta E = E_{\max} - E_{\min}$  між величинами освітленості двох сусідніх фоторецепторів) може просторово розділяти зображення цих двох точок. Фізіологічну реакцію на зображення двох точок може забезпечити група не менш як із трьох сусідніх фоторецепторів. Ця група відчуває “провалля” в освітленості за умови, що центральний максимум освітленості в зображенні однієї точки припадає на один фоторецептор (ковбочку чи паличку), центральний максимум в зображенні другої точки – на другий фоторецептор, а між вказаними фото-

рецепторами міститься ще один фоторецептор, над яким розташовується “провалля” – мінімум сумарної освітленості (мінімум графіка  $E(x, y)$  (див. рис. 2). Підвищенню чутливості зорового апарату до зображення цих точок також сприяє тремор – швидкі хаотичні кутові рухи ока з амплітудою в межах 20–40 кутових секунд і частотою 30–90 Гц. При треморі зображення простору об’єктів переміщується по сітківці в різних напрямках з амплітудою 1,6–3,2 мкм (приблизно діаметр однієї палички або ковбочки). Тим самим сітківка нібито “ощуває” зображення.

Контрастна чутливість має природну границю. Так, із практики астрономічних спостережень зоряного неба відомо, що око ще спроможне відрізнити дві зірки як окремі, якщо їх дифракційні зображення розміщені на сітківці на відстані  $\delta = 0,87r$  і  $\Delta E / E_{\max} = 0,05$  (табл. 1,

рядок 2). Вказана відстань є мінімальною серед тих, за яких зоровий апарат фізіологічно ще може відчувати зображення двох точок як роздільні.

Якщо ж вказана відстань зменшується до  $\delta = 0,78r$ , то  $\Delta E/E_{\max} = 0$ . В цьому випадку оптична система ока "поєднує" дифракційні зображення двох точок в одну пляму (табл. 1, рядок 3). Сітківка, якою б "дрібною" не була її мозаїчна структура, не зможе при цьому розрізнити в такій плямі зображення двох точок через те, що трійка зазначених вище сусідніх фоторецепторів отримує однакову освітленість. В такому випадку око сприймає зображення двох точок як зображення однієї точки. Відстань  $\delta = 0,78r$  встановлена Сперроу. Вона має назву абсолютної межі просторового розділення оптичного пристрою – оптичної системи, поєднаної з фотоелектричним аналізатором зображень [4].

Визначимо межу просторового розділення зорового апарату, обумовлену мозаїчністю сітківки. Так, при середньому статистичному значенні відстані між двома сусідніми фоторецепторами сітківки дорослої людини  $d \approx 2$  мкм відстань між центрами першого та третього сусідніх фоторецепторів становить  $2d \approx 4$  мкм (див. рис. 2).

При середньостатистичній величині передньої фокусної відстані ока дорослої людини  $f \approx 17$  мм кутова відстань  $\varepsilon$  між двома точками простору об'єктів, зображення яких містяться в центрах першого і третього фоторецепторів сітківки відповідно, розраховується за формулою  $\varepsilon = d/f = (4 \dots 5/17) \cdot 10^{-3}$  радіан і становить 49–60 кутових секунди, тобто приблизно одну кутову хвилину –  $1'$ . Вона є практично сталою для людей з різними габаритами ока. Не випадково, що фізіологічно нормальна гострота зору, відповідно до формули її визначення та згідно з результатами попереднього розрахунку, дорівнює одиниці:  $\theta = 1'/\varepsilon = 1'/1' = 1$ .

Узгодженість роздільної здатності оптичної системи ока з роздільною здатністю сітківки досягається в тому випадку, коли величина  $2d$ , згідно з правилом Релея, дорівнює радіусу кола Ейрі –  $r$  (формула її розрахунку наведена в табл. 1) [5]. При довжині хвилі  $\lambda = 0,55$  мкм, за якої око людини має максимум спектральної чутливості, зазначена вище умова узгодженості виконується, коли діаметр зіниці становить

$$D = \frac{1,22\lambda f}{r} = \frac{1,22\lambda f}{2d} = \frac{1,22 \cdot 0,55 \cdot 10^{-3} \cdot 17}{2 \cdot 2 \cdot 10^{-3}} = 2,85 \text{ [мм]}.$$

Численними дослідженнями встановлено існування зв'язку між гостротою зору та діаметром зіниці. Так, максимальної гостроти зору нормальне людське око досягає при діаметрі зіниці  $D \approx 3$  мм. Це підтверджує не тільки факт узгодженості роздільної здатності оптичної системи ока з роздільною здатністю сітківки, але й дивовижну еволюційну здатність живої природи до параметричної оптимізації функцій, які виконують органи людського організму.

При зростанні діаметра зіниці понад 3 мм зростає також і вплив на гостроту зору оптичних неоднорідностей середовищ кришталика та скловидного тіла, а також вплив природних недосконалостей форми та взаємного розміщення рогівки і кришталика. Ці фактори призводять до збільшення величини кута  $\varepsilon$ , що зменшує гостроту зору. З цього можна зробити висновок, що вплив залишкових абераций оптичної системи ока на її просторову роздільну здатність і допустимі величини цих абераций треба встановлювати для того стану ока, за якого воно має найвищу гостроту зору, наприклад при діаметрі зіниці 3 мм.

Аберації будь-якої оптичної системи змінюють розподіл освітленості в дифракційному зображенні точки. Вже при невеликій хвильовій аберaciji (частках світлової хвилі) спостерігаються зменшення освітленості  $E_0$  в центрі дифракційного зображення точки на сітківці і візуальне збільшення її розмірів за рахунок перерозподілу світлового потоку із центрального ядра в дифракційні кільця. Це призводить до зменшення співвідношення  $\Delta E/E_{\max}$  (див. рис. 2) в зображенні двох точок, розміщених на відстані радіуса кола Ейрі  $r$ , і до погіршення для зорового апарату умов просторового розділення цих двох точок.

Штрель встановив, що зменшення величини  $E_{\max}$  не більш як на 20 % ще зберігає якість зображення оптичної системи на рівні дифракційно-обмеженої [4]. Це означає, що виконання умови  $S = E_0/E_{\max} \geq 0,8$ , де  $S$  – число Штреля, дає можливість вважати будь-яку аберацийну оптичну систему, в т.ч. й оптичну систему ока, практично безабераційною.

Математично доведено, що при  $СКВ_W$  хвильової аберації, що не перевищує  $\lambda/10$ , число Штреля можна розраховувати за формулою

$$S \approx 1 - 4\pi^2 \left( \frac{СКВ_W}{\lambda} \right)^2, \quad (1)$$

де  $СКВ_W$  — середньоквадратична величина хвильової аберації в зоні зіниці. З формули (1) випливає, що при виконанні умови Штреля  $S \geq 0,8$  допустимою є величина  $СКВ_W \leq \lambda/14$ .

Ця умова має назву критерію Марешаля. Її виконання гарантує для будь-якої оптичної системи практично безабераційне зображення осьової точки.

Однак застосування критерію Марешаля до оптичної системи ока призводить до невірної жорсткого допуску на СКВ хвильової аберації. В цьому неважко переконатися при моделюванні аберацій ока і розрахунках освітленості в зображенні двох точок за допомогою комп'ютерної програми ZEMAX. В табл. 2 наведено результати такого моделювання, де  $C_n^{\pm m}$  — стандартизовані згідно з [6] амплітуди абераційних мод, що подані відомими в оптиці поліномами Церніке.

Моделювання здійснювалося за умов:  $\lambda = 0,55$  мкм,  $D = 3$  мм,  $f = 17$  мм. Наведені в табл. 2 дані про число Штреля  $S$ , величину  $\eta$  і вигляд зображення двох тестових точок, які розміщені на відстані  $r$  одна від одної, показують, що невиконання критерію Марешаля ще не призводить до візуального злиття зображень двох точок (див. табл. 2, рядки 2 і 3, де  $S < 0,8$ ).

Кожна з абераційних мод має характерний вплив на вигляд зображення пари точок, але всі зазначені в табл. 2 абераційні моди практично не руйнують зображення, якщо їх амплітуди не перевищують  $\lambda/10$ . Помітне руйнування зображення точок виникає при  $C_n^{\pm m} > \lambda/5$ , що підтверджує і уточнює відомий критерій Релея, згідно з яким кожна з цих абераційних мод може мати амплітуду не більшу  $\lambda/4$  [4, 5]. Як видно з табл. 2, рядок 3, при  $C_n^{\pm m} = \lambda/4$  виникає істотне руйнування зображень пари точок. Візуально розпізнавати їх як роздільні, вочевидь, неможливо.

Результати комп'ютерного моделювання і досліджень впливу на дифракційне зображення тестової пари точок всіх абераційних мод до шостого степеневих порядку включно показу-

ли, що виконання умови  $C_n^{\pm m} < \lambda/10$  для кожної окремої моди (якщо всі інші відсутні) надійно забезпечує таку якість зображення цих точок на сітківці, яка практично не відрізняється від безабераційної, тобто обмежується тільки дифракцією. Якщо хвильова аберація у своєму складі має всі існуючі моди, то практично безабераційне зображення тестової пари точок на сітківці ока забезпечується при виконанні умови

$$\sqrt{\sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} [(C_n^m)_{\text{доп}}^2 + (C_n^{-m})_{\text{доп}}^2]} \leq 0,1\lambda, \quad (2)$$

де  $(C_n^{\pm m})_{\text{доп}}$  — допустимі величини стандартизованих амплітуд абераційних мод при  $D = 3$  мм [6].

Сказане вище дає змогу сформулювати правило визначення допустимих похибок аберометрії ока людини: *величини  $(C_n^{\pm m})_{\text{доп}}$  як амплітуди залишкових абераційних мод, що задовольняють умову (2), є допустимими похибками аберометрії ока, тому що наявність таких мод в зоні зіниці, якій властива найвища природна гострота зору, практично її не зменшує.*

Використання на практиці умови (2) викликає кілька питань.


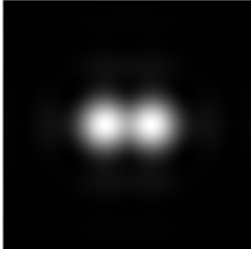
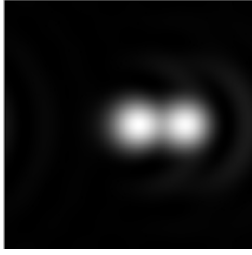
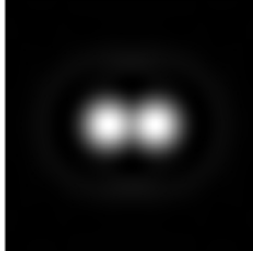
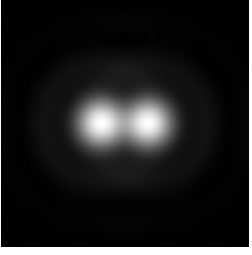
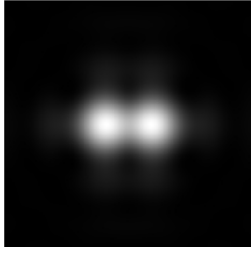
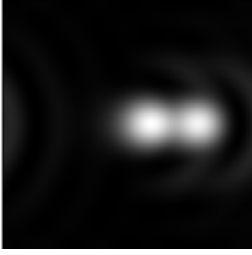
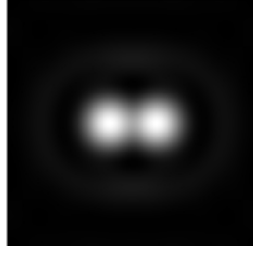
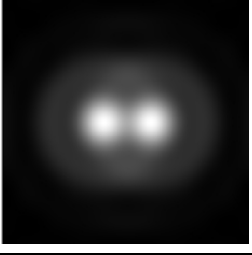
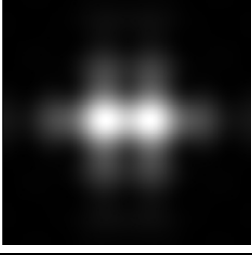
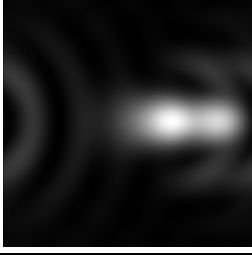
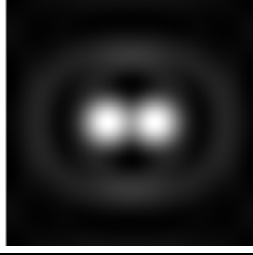
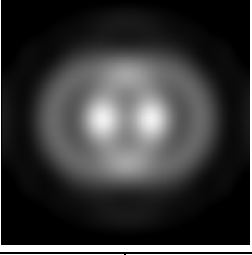
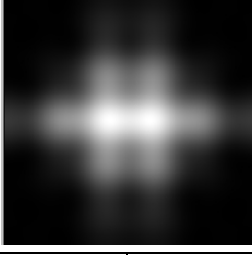
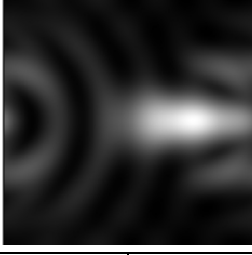
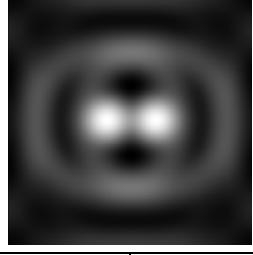
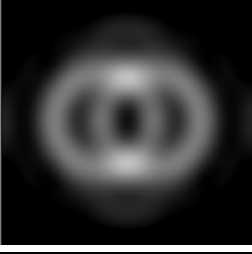
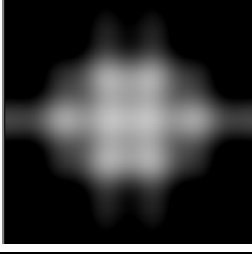
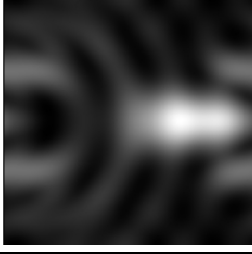
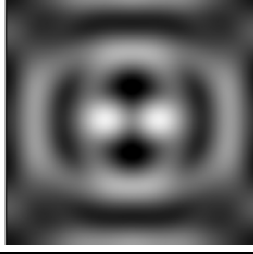
Як коректно розподілити поле допуску на похибку, що подане у правій частині виразу (2), між всіма абераційними модами?

Скільки абераційних мод і до якого степеневих порядку треба враховувати у виразі (2) з огляду на те, що амплітуди мод з ростом їх степеневих порядку монотонно і досить швидко зменшуються?

Як визначати величини  $(C_n^{\pm m})_{\text{доп}}$ , якщо аберометрія ока здійснюється в зоні зіниці, діаметр якої перевищує 3 мм, тобто той діаметр, для якого отримана умова (2)?

Відомі два способи розподілу поля допуску. Перший спосіб забезпечує однакову для всіх абераційних мод відносну допустиму похибку, другий передбачає однакову для всіх мод абсолютну допустиму похибку. В зв'язку з тим, що амплітуди абераційних мод зменшуються з ростом їх степеневих порядку, перший спосіб потребує забезпечувати при аберометрії, відповідно, менші абсолютні похибки визначення амплітуд мод вищих степеневих порядків. Виконати технічно цю вимогу на практиці складно чи навіть неможливо тому, що амплітуди мод степеневих порядків вище

Таблиця 2. Зображення на сітківці двох точок при наявності вказаних абераций

$C_n^m$	Дефокус ( $C_2^0$ )		Астигматизм ( $C_2^2$ )		Кома ( $C_3^1$ )		Сферична ( $C_4^0$ )	
$\frac{\lambda}{14}$								
	$\eta = 0,27$	$S = 0,82$	$\eta = 0,23$	$S = 0,82$	$\eta = 0,24$	$S = 0,87$	$\eta = 0,27$	$S = 0,86$
$\frac{\lambda}{10}$								
	$\eta = 0,27$	$S = 0,68$	$\eta = 0,21$	$S = 0,68$	$\eta = 0,22$	$S = 0,77$	$\eta = 0,27$	$S = 0,74$
$\frac{\lambda}{6, (6)}$								
	$\eta = 0,28$	$S = 0,40$	$\eta = 0,14$	$S = 0,42$	$\eta = 0,20$	$S = 0,56$	$\eta = 0,28$	$S = 0,52$
$\frac{\lambda}{5}$								
	$\eta = 0,33$	$S = 0,16$	$\eta = 0,09$	$S = 0,21$	не визн.	$S = 0,35$	$\eta = 0,30$	$S = 0,34$
$\frac{\lambda}{4}$								
	$\eta = 0,65$	$S = 0,07$	$\eta = 0,07$	$S = 0,15$	не визн.	$S = 0,21$	$\eta = 0,31$	$S = 0,24$

третього можуть мати надто малі абсолютні величини – соті частки довжини хвилі. Більш реалістичним є другий спосіб. Але за його використання допустимі відносні похибки визначення амплітуд мод зростають зі збільшенням їх степеневих порядків. Якщо відносні похибки визначення амплітуд мод, які характерні вищим степеневим порядкам, починають перевищувати встановлений поріг, наприклад  $\pm 50\%$ , то їх визначення втрачає сенс.

Накопичений досвід aberометрії очей свідчить про те, що спектр aberаційних мод людського ока практично обмежується четвертим степеневим порядком ( $n = 4$ ,  $m = \pm 4$ ).

При апроксимації хвильової aberації ока до 4-го степеневих порядків включно кількість aberаційних мод становить 12. До них належать: три моди другого степеневих порядків (дефокус і дві моди первинного астигматизму – синусна та косинусна), чотири моди третього степеневих порядків (дві моди первинної коми і дві моди трейфойлу) та п'ять мод четвертого степеневих порядків (первинна мода сферичної aberації, дві моди вторинного астигматизму та дві моди тетрафойлу). Моди першого порядків не враховуються, тому що вони не порушують гомоцентричності пучків променів, через що не впливають на гостроту зору. Тому при використанні другого способу розподілу поля допуску між модами, наприклад з другого по четвертий степеневий порядок, яких всього 12, допустима похибка визначення амплітуди кожної з вказаних мод згідно з виразом (2) має становити

$$(C_n^{\pm m})_{\text{доп}} \leq \frac{0,1\lambda}{\sqrt{N}} = \frac{0,1\lambda}{\sqrt{12}} = 0,029\lambda, \quad (3)$$

де  $N$  – кількість наявних aberаційних мод, з яких складається функція хвильової aberації ока.

Розрахунки з використанням (3) у діоптрійній мірі допустимої похибки визначення дефокуса (аметропії)  $\Delta A_{R\text{доп}}$  і допустимої похибки визначення астигматизму  $\Delta A_{S\text{доп}}$  за допомогою формул [1] у зоні зіниці діаметром 3 мм показують, що  $\Delta A_{R\text{доп}} [\text{дптр}] = \pm 4000\sqrt{3} \times [C_2^0]_{\text{доп}} (0,5D)^{-2} \cong \pm 0,05 \text{ дптр}$ ,  $\Delta A_{S\text{доп}} [\text{дптр}] = \pm 4000\sqrt{6} \sqrt{[C_2^2]_{\text{доп}} + [C_2^{-2}]_{\text{доп}}} (0,5D)^{-2} \cong \pm 0,1 \text{ дптр}$ .

Результати розрахунків, як видно з наведених цифр, узгоджуються з існуючими в прак-

тичній офтальмології уявленнями про необхідну точність здійснення рефрактометрії, тобто визначення амплітуд aberаційних мод другого степеневих порядків.

Формула (3) отримана для зони зіниці діаметром  $D = 3$  мм. Проте aberометрію роблять у зоні зіниці ока діаметром до 7 мм, частіше – до 6 мм. Тому в цих зонах потрібно встановити ті величини допустимих похибок відтворення амплітуд aberаційних мод, які при перерахунку на зону діаметром 3 мм забезпечують виконання умови (2) або (3). Для цього необхідно встановити функціональну залежність  $C_n^{\pm m}(D)$ .

Відомо, що амплітуди  $C_n^{\pm m}$  будь-якої aberаційної моди, визначені для зон різних діаметрів  $D_1$  і  $D_2$ , пов'язані співвідношенням

$$C_n^{\pm m}(D_2) = \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^n C_n^{\pm m}(D_1). \quad (4)$$

Формула (4) дає можливість розрахувати допустимі величини похибок aberометрії в зоні діаметром  $D_2$ , якщо допуски встановлені для діаметра зіниці  $D_1 = 3$  мм:

$$C_{n\text{доп}}^{\pm m}(D_2) = \left(\frac{D_2}{3}\right)^n C_{n\text{доп}}^{\pm m}(3) = \left(\frac{D_2}{3}\right)^n 0,029\lambda. \quad (5)$$

Проте формулою (5) можна користуватися для розрахунку допустимих похибок визначення амплітуд тільки тих мод, які в множині, що використовується для апроксимації функції хвильової aberації в зоні діаметром  $D_2$ , не належать до корельованих, тобто пов'язаних між собою. Корельованими є моди, які належать одному типу aberацій, що мають однакові значення кутової частоти  $\pm m$ , але мають різний степеневий порядок  $n$ . Такими, наприклад, є моди астигматизму різних степеневих порядків з амплітудами  $C_2^{\pm 2}$ ,  $C_4^{\pm 2}$ ,  $C_6^{\pm 2}$ , ... Разом вони відображають астигматизм як такий.

Вказані моди стають корельованими внаслідок виконання процедури апроксимації функції хвильової aberації. Вона здійснюється методом найменших квадратів чи методом сингулярного розкладу конструктивної матриці [7] за результатами прямих чи опосередкованих фізичних вимірювань вказаної функції. Апроксимація коловими поліномами Церніке призводить до такої збалансованості різних мод одного типу aberацій, яка в зоні зіниці з фіксо-

ваним діаметром забезпечує мінімальне значення СКВ хвильового фронту відносно сфери порівняння. Цей баланс порушується, якщо визначену функцію хвильової аберации в одній зоні аберації обмежити зоною іншого діаметра. Наприклад, із аберації ока в зоні зіниці діаметром 6 мм встановлено, що мода астигматизму 6-го степеневих порядку  $C_6^{-2} = 1\lambda$ , а моди нижчих степеневих порядків відсутні, тобто  $C_4^{-2} = 0$ ,  $C_2^{-2} = 0$ . При зменшенні діаметра зіниці ока з 6 до 3 мм мода  $Z_6^{\pm 2}$  дійсно отримує амплітуду згідно з (4)

$$C_6^{-2}(3) = \left(\frac{3}{6}\right)^6 C_6^{-2}(6) = 0,0156\lambda, \quad (6)$$

але в зоні діаметром 3 мм з'являються моди нижчих степеневих порядків  $Z_4^{\pm 2}$ ,  $Z_2^{\pm 2}$  з амплітудами відповідно  $C_4^{-2}(3) = -17,3 C_6^{-2}(3) = -17,3 \times 0,0156 = -0,27\lambda$  і  $C_2^{-2}(3) = 66,9 C_6^{-2}(3) = 66,9 \times 0,0156 = 1,04\lambda$ .

Числа  $-17,3$  і  $66,9$  є коефіцієнтами кореляції між відповідними модами. Вони знайдені за допомогою програми ZEMAX.

Коли аберацію здійснюють в зоні діаметром більше 3 мм, поява в спектрі абераційних мод нижчих степеневих порядків потребує обов'язкового врахування. Допуски на похибки визначення амплітуд  $C_n^{\pm m}$  у цих зонах мають бути такими, щоб при зменшенні діаметра зіниці ока до 3 мм величини амплітуд всіх абераційних мод, незважаючи на їх зміни, залишалися в межах, що задовольняють умову (2) або (3).

Нижче наведено вирази, отримані за допомогою програми ZEMAX, які встановлюють властиві оптичній системі ока зв'язки між окремими абераційними модами, якщо аберація здійснюється в зоні зіниці одного діаметра, а амплітуди мод визначаються в зоні зіниці іншого діаметра, причому максимальний степеневий порядок поліномів, що використовуються, не перевищує 6.

Так, за результатами аберації в зоні зіниці діаметром 6 мм, в якій визначені амплітуди мод  $C_n^{\pm m}(6)$ , пов'язані з цими модами амплітуди мод у зоні зіниці діаметром 3 мм —  $C_n^{\pm m}(3)$  і мають такі значення:

$$\begin{aligned} C_2^0(3) &= \\ &= \left(\frac{3}{6}\right)^2 C_2^0(6) - 11,49 \left(\frac{3}{6}\right)^4 C_4^0(6) + 66,9 \left(\frac{3}{6}\right)^6 C_6^0(6) = \\ &= 0,25 C_2^0(6) - 0,71 C_4^0(6) + 1,04 C_6^0(6); \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} C_2^{\pm 2}(3) &= \left(\frac{3}{6}\right)^2 C_2^{\pm 2}(6) - \\ &- 11,49 \left(\frac{3}{6}\right)^4 C_4^{\pm 2}(6) + 66,9 \left(\frac{3}{6}\right)^6 C_6^{\pm 2}(6) = \\ &= 0,25 C_2^{\pm 2}(6) - 0,72 C_4^{\pm 2}(6) + 1,05 C_6^{\pm 2}(6); \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} C_3^{\pm 1}(3) &= \left(\frac{3}{6}\right)^3 C_3^{\pm 1}(6) - 14,3 \left(\frac{3}{6}\right)^5 C_5^{\pm 1}(6) = \\ &= 0,125 C_3^{\pm 1}(6) - 0,45 C_5^{\pm 1}(6); \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} C_3^{\pm 3}(3) &= \left(\frac{3}{6}\right)^3 C_3^{\pm 3}(6) - 14,5 \left(\frac{3}{6}\right)^5 C_5^{\pm 3}(6) = \\ &= 0,125 C_3^{\pm 3}(6) - 0,45 C_5^{\pm 3}(6); \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} C_4^0(3) &= \left(\frac{3}{6}\right)^4 C_4^0(6) - 17,3 \left(\frac{3}{6}\right)^6 C_6^0(6) = \\ &= 0,0625 C_4^0(6) - 0,27 C_6^0(6); \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} C_4^{\pm 2}(3) &= \left(\frac{3}{6}\right)^4 C_4^{\pm 2}(6) - 17,3 \left(\frac{3}{6}\right)^6 C_6^{\pm 2}(6) = \\ &= 0,0625 C_4^{\pm 2}(6) - 0,27 C_6^{\pm 2}(6); \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} C_4^{\pm 4}(3) &= \left(\frac{3}{6}\right)^4 C_4^{\pm 4}(6) - 17,4 \left(\frac{3}{6}\right)^6 C_6^{\pm 4}(6) = \\ &= 0,0625 C_4^{\pm 4}(6) - 0,272 C_6^{\pm 4}(6). \end{aligned} \quad (13)$$

За результатами аберації в зоні зіниці діаметром 5 мм амплітуди мод в зоні зіниці діаметром 3 мм мають такі значення:

$$\begin{aligned} C_2^0(3) &= \\ &= \left(\frac{3}{5}\right)^2 C_2^0(5) - 6,82 \left(\frac{3}{5}\right)^4 C_4^0(5) + 20,69 \left(\frac{3}{5}\right)^6 C_6^0(5) = \\ &= 0,36 C_2^0(5) - 0,88 C_4^0(5) + 0,97 C_6^0(5); \end{aligned} \quad (14)$$



$$C_2^{\pm 2}(3) = \left(\frac{3}{5}\right)^2 C_2^{\pm 2}(5) - 6,85 \left(\frac{3}{5}\right)^4 C_4^{\pm 2}(5) + 20,69 \left(\frac{3}{5}\right)^6 C_6^{\pm 2}(5) = 0,36 C_2^{\pm 2}(5) - 0,89 C_4^{\pm 2}(5) + 0,97 C_6^{\pm 2}(5); \quad (15)$$

$$C_3^{\pm 1}(3) = \left(\frac{3}{5}\right)^3 C_3^{\pm 1}(5) - 8,56 \left(\frac{3}{5}\right)^5 C_5^{\pm 1}(5) = 0,216 C_3^{\pm 1}(5) - 0,665 C_5^{\pm 1}(5); \quad (16)$$

$$C_3^{\pm 3}(3) = \left(\frac{3}{5}\right)^3 C_3^{\pm 3}(5) - 8,67 \left(\frac{3}{5}\right)^5 C_5^{\pm 3}(5) = 0,216 C_3^{\pm 3}(5) - 0,674 C_5^{\pm 3}(5); \quad (17)$$

$$C_4^0(3) = \left(\frac{3}{5}\right)^4 C_4^0(5) - 10,33 \left(\frac{3}{5}\right)^6 C_6^0(5) = 0,13 C_4^0(5) - 0,48 C_6^0(5); \quad (18)$$

$$C_4^{\pm 2}(3) = \left(\frac{3}{5}\right)^4 C_4^{\pm 2}(5) - 10,35 \left(\frac{3}{5}\right)^6 C_6^{\pm 2}(5) = 0,13 C_4^{\pm 2}(5) - 0,48 C_6^{\pm 2}(5); \quad (19)$$

$$C_4^{\pm 4}(3) = \left(\frac{3}{5}\right)^4 C_4^{\pm 4}(5) - 10,41 \left(\frac{3}{5}\right)^6 C_6^{\pm 4}(5) = 0,13 C_4^{\pm 4}(5) - 0,486 C_6^{\pm 4}(5). \quad (20)$$

За результатами аберометрії в зоні зіниці діаметром 4 мм амплітуди мод в зоні зіниці діаметром 3 мм мають такі значення:

$$C_2^0(3) = \left(\frac{3}{4}\right)^2 C_2^0(4) - 3,0 \left(\frac{3}{4}\right)^4 C_4^0(4) + 2,0 \left(\frac{3}{4}\right)^6 C_6^0(4) = 0,56 C_2^0(4) - 0,95 C_4^0(4) + 0,35 C_6^0(4); \quad (21)$$

$$C_2^{\pm 2}(3) = \left(\frac{3}{4}\right)^2 C_2^{\pm 2}(4) - 3,0 \left(\frac{3}{4}\right)^4 C_4^{\pm 2}(4) + 2,0 \left(\frac{3}{4}\right)^6 C_6^{\pm 2}(4) = 0,56 C_2^{\pm 2}(4) - 0,95 C_4^{\pm 2}(4) + 0,36 C_6^{\pm 2}(4); \quad (22)$$

$$C_3^{\pm 1}(3) = \left(\frac{3}{4}\right)^3 C_3^{\pm 1}(4) - 3,77 \left(\frac{3}{4}\right)^5 C_5^{\pm 1}(4) = 0,422 C_3^{\pm 1}(4) - 0,895 C_5^{\pm 1}(4); \quad (23)$$

$$C_3^{\pm 3}(3) = \left(\frac{3}{4}\right)^3 C_3^{\pm 3}(4) - 3,80 \left(\frac{3}{4}\right)^5 C_5^{\pm 3}(4) = 0,422 C_3^{\pm 3}(4) - 0,902 C_5^{\pm 3}(4); \quad (24)$$

$$C_4^0(3) = \left(\frac{3}{4}\right)^4 C_4^0(4) - 4,56 \left(\frac{3}{4}\right)^6 C_6^0(4) = 0,316 C_4^0(4) - 0,812 C_6^0(4); \quad (25)$$

$$C_4^{\pm 2}(3) = \left(\frac{3}{4}\right)^4 C_4^{\pm 2}(4) - 4,57 \left(\frac{3}{4}\right)^6 C_6^{\pm 2}(4) = 0,316 C_4^{\pm 2}(4) - 0,813 C_6^{\pm 2}(4); \quad (26)$$

$$C_4^{\pm 4}(3) = \left(\frac{3}{4}\right)^4 C_4^{\pm 4}(4) - 4,58 \left(\frac{3}{4}\right)^6 C_6^{\pm 4}(4) = 0,316 C_4^{\pm 4}(4) - 0,815 C_6^{\pm 4}(4). \quad (27)$$

Вирази (7)–(27) й умова (3) дають змогу встановити допустимі похибки аберометрії. Якщо величину  $C_n^{\pm m}(3)$ , яка міститься у лівій частині кожного з виразів (7)–(27), вважати функцією випадкових величин  $C_n^{\pm m}(4)$ ,  $C_n^{\pm m}(5)$ ,  $C_n^{\pm m}(6)$ , то згідно з теорією функцій випадкових аргументів СКВ  $\sigma[C_n^{\pm m}(3)]$  можна визначити через СКВ  $\sigma[C_n^{\pm m}(D)]$  за формулою [8]:

$$\sigma[C_n^{\pm m}(3)] = \sqrt{\sum_i \{k_{nm}^2(D) \sigma^2[C_n^{\pm m}(D)]\}_i}$$

або

$$[C_n^{\pm m}(3)]_{\text{доп}} = \sqrt{\sum_i \{k_{nm}^2(D) [C_n^{\pm m}(D)]_{\text{доп}}^2\}_i}, \quad (28)$$

де  $k_{nm}(D)$  – числові коефіцієнти при амплітудах  $C_n^{\pm m}(D)$  у правих частинах виразів (7)–(27),  $D$  – діаметр зони аберометрії на зіниці ока – 6 мм, 5 мм, 4 мм,  $i$  – порядковий номер доданка в правій частині виразів (7)–(27). При умові, що поля допусків похибок кожної амплі-

Таблиця 3. Допустимі похибки визначення амплітуд абераційних мод

Допустимі похибки $\pm[C_n^{\pm m}(D)]_{\text{доп}}$ , мкм	Зона аберометрії на зіниці ока, мм		
	$D = 4$	$D = 5$	$D = 6$
$[C_2^0(D)]_{\text{доп}}, [C_4^0(D)]_{\text{доп}}, [C_6^0(D)]_{\text{доп}}, [C_2^{\pm 2}(D)]_{\text{доп}}, [C_4^{\pm 2}(D)]_{\text{доп}}, [C_6^{\pm 2}(D)]_{\text{доп}}$	0,0138	0,0117	0,0124
$[C_3^{\pm 1}(D)]_{\text{доп}}, [C_5^{\pm 1}(D)]_{\text{доп}}, [C_3^{\pm 3}(D)]_{\text{доп}}, [C_5^{\pm 3}(D)]_{\text{доп}}$	0,0160	0,0226	0,0341
$[C_4^{\pm 4}(D)]_{\text{доп}}, [C_6^{\pm 4}(D)]_{\text{доп}}$	0,0181	0,0320	0,0576

туди, які входять у праву частину вказаних виразів, є однаковими, то однаковими також є і величини  $[C_n^{\pm m}(D)]_{\text{доп}}$  окремо у кожному з цих виразів, а тому їх можна винести у (28) за знак радикала. Звідси, відповідно до (3), допустиму похибку визначення кожної з амплітуд, що входить у праву частину виразів (7)–(27), можна розрахувати за формулою

$$[C_n^{\pm m}(D)]_{\text{доп}} = \frac{[C_n^{\pm m}(3)]_{\text{доп}}}{\sqrt{\sum_i \{k_{nm}^2(D)\}_i}} = \frac{0,029\lambda}{\sqrt{\sum_i \{k_{nm}^2(D)\}_i}}. (29)$$

Використання формули (29) покажемо на прикладі розрахунку допустимих похибок визначення амплітуд за результатами аберометрії у зоні діаметром 6 мм, що входять до виразу (7):

$$[C_2^0(6)]_{\text{доп}} = [C_4^0(6)]_{\text{доп}} = [C_6^0(6)]_{\text{доп}} = \frac{0,029 \cdot 0,55 [\text{мкм}]}{\sqrt{0,25^2 + 0,71^2 + 1,04^2}} = 0,0124 \text{ мм}.$$

Аналогічно розраховуються допустимі похибки визначення амплітуд інших абераційних мод. Результати цих розрахунків подані в табл. 3.

До даних табл. 3 додамо такі коментарі:

1) якщо допустима похибка конкретної амплітуди могла бути визначеною із різних рівнянь (наприклад,  $[C_4^0(6)]_{\text{доп}}$  із виразів (7) і (11)), то за допустиме її значення покладалася величина амплітуди, яка є меншою;

2) допустимі похибки амплітуд  $C_5^{\pm 5}(D)$  і  $C_6^{\pm 6}(D)$  в таблиці не подані тому, що їх немає у виразах (7)–(27). Вказані похибки можуть бути розрахованими в інший спосіб, наприклад за формулою (5).

Величини  $[C_n^{\pm m}(D)]_{\text{доп}}$  показують, що допустимі похибки визначення амплітуд абераційних мод другого степеневих порядку і осевих мод залишаються майже незмінними при зміні діаметра зони аберометрії на зіниці в діапазоні 4–6 мм. Проте величини  $[C_n^{\pm m}(D)]_{\text{доп}}$  інших абераційних мод вищих степеневих порядків помітно зростають при збільшенні степеневих порядку.

Отримані і подані в табл. 3 дані дають можливість не тільки обґрунтувати вимоги до точності, з якою має здійснюватися аберометрія ока людини в тій чи іншій зоні зіниці ока, але й слугувати базою для формування вимог до взірцевих (еталонних) абераційних моделей ока, які потрібні для вивірки офтальмологічних аберометрів.

## Висновки

Аналіз абераційних спотворень дифракційного зображення на сітківці ока двох точок, розміщених на відстані дифракційної межі розділення, дав можливість знайти максимальний рівень аберацій, при якому оптична система ока ще забезпечує зоровому органу нормальну природну гостроту зору.

Допустимою є хвильова аберація, що в зоні отвору зіниці діаметром 3 мм, при якому зоровий апарат людини в нормальному стані досягає найвищої гостроти зору, має  $СКВ \leq 0,1\lambda$ .

При рівновеликих допусках на похибки визначення амплітуд абераційних мод за поліноміальним розкладом Церніке та при обмеженні розкладу функції хвильової аберації ока четвертим степеневим порядком поліномів допустимою в зоні зіниці діаметром 3 мм є похибка визначення амплітуди кожної моди не більше  $\pm 0,029\lambda$ .

Отримані результати проведених досліджень дають змогу обґрунтовано формулювати вимоги до точності вимірювань хвильової аберації ока офтальмологічними aberометрами та до точності фізичного моделювання хвильової аберації ока моделями, які потрібні при вивірці та тестуванні aberометрів як взірцевих мір.

Створення та випробування абераційних моделей ока, що забезпечують контроль похибок офтальмологічних aberометрів з обґрунтованою в цій статті точністю, мають стати одним із головних напрямів подальших досліджень.

1. Сокурєнко В.М., Тимчик Г.С., Чиж І.Г. Око людини та офтальмологічні прилади: Навч. посіб. — К.: ІВЦ “Вид-во “Політехніка”, 2009. — 260 с.
2. *New Technology*: Performance of a New Binocular Wavefront Aberrometer Based on a Self-imaging Diffractive Sensor / L. Warden, Y. Liu, P.S. Binder et al. // J. of Refractive Surgery. — 2008. — **24**, N 2. — P. 188–196.
3. *Comparison of Internal and Total Optical Aberrations for 2 Aberrometers: iTrace and OPD Scan* / Jung Bin Won, Sun Woong Kim, Eung Kweon Kim et al. // Korean Journal of Ophthalmology. — 2008. — **22**. — P. 210–213.
4. *Handbook of Optical Design* / Eds. D. Malacara, Z. Malacara. — 2<sup>nd</sup> ed. — Mexico; New York; Basel: Edition Centro de Investigaciones en Optica, 2004. — P. 255.
5. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. — М.: Наука, 1970. — 856 с.
6. *Standards for reporting the optical aberrations of eyes* / L.N. Thibos, R.A. Applegate, J.T. Schwiegerling, R. Webb // J. Refract Surg. — 2002. — **18**, N 5. — P. 652–660.
7. Родионов С.А. Автоматизация проектирования оптических систем. — Л.: Машиностроение, 1982. — 270 с.
8. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. — М.: Наука. Глав. ред. физ.-мат. лит.-ры, 1969. — 576 с.

Рекомендована Радою  
приладобудівного факультету  
НТУУ “КПІ”

Надійшла до редакції  
27 липня 2011 року